# Tutorium Analysis 1
# Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

Marvin Jahn

24. Januar 2023

# Inhaltsverzeichnis



Dises Dokument enthält Lösungen zu ausgewählten Aufgaben aus der VL *Analysis 1*, gehalten von Prof. Friesecke im Wintersemester 2022/23 an der Technischen Universität München.
Das Ziel ist, weitere Intuitionen und alternative Lösungswege zu zeigen, die nicht in der offiziellen Musterlösung zu finden sind.

# Aufgabe T2.2

Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d.h. es gibt eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

*Beweis.* Wir wollen eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ konstruieren. Dafür betrachten wir die Menge der Primzahlen $P$ und bilden für $p \in P$ die Menge

$$Q(p) \coloneqq \{p, p^2, p^3, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

der Potenzen von $p$. Weil die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, sind die Mengen $Q(p)$ paarweise disjunkt und wir setzen $R \coloneqq \mathbb{N} \setminus \bigcup_{p \in P} Q(p)$ (z.B. ist $6 = 2 \cdot 3 \in R$). Es sei $q\colon P \to \mathbb{N}$ die Funktion, die die $n$-te Primzahl auf $n$ abbildet (d.h. $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(5) = 3$). Für $p \in P$ definieren wir $f$ auf $Q(p)$ durch

$$f\colon Q(p) \to \mathbb{Q}_+,\ p^k \mapsto \frac{q(p)}{k}.$$

Auf $R$ setzen wir $f = 0$. Dies liefert eine surjektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$.
Als Vereinigung $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ von abzählbaren Mengen ist $\mathbb{Q}$ also abzählbar. $\square$

# Aufgabe T2.3

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2^n \geq n^2 + 100^{100}.$$

Intuition: Die linke Seite ist *exponentiell*, während die rechte nur *quadratisch* ist. Folglich wächst die linke Seite wesentlich schneller.
Dies wollen wir nun mit drei verschiedenen Beweisen untermauern.

*Beweis 1*: Was wäre,wenn wir $100^{100}$ durch $n$ ersetzen? D.h. wir zeigen

$$2^n \geq n^2 + n. \tag{$*$}$$

Dafür nutzen wir Induktion.

*Beweis.* Für $n = 5$ gilt $2^5 = 32 \geq 30 = 5^2 + 5$, dies ist unser Induktionsanfang.
Für den Induktionsschritt sei $n \geq 5$ und wir schreiben zunächst die linke Seite und die rechte Seite um:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{\geq} 2 \cdot (n^2 + n) = 2n^2 + 2n \\ (n+1)^2 + (n+1) &= n^2 + 3n + 2. \end{aligned}$$

D.h. um $2^{n+1} \geq (n+1)^2 + (n+1)$ zu erhalten, müssen wir noch zeigen, dass

$$2n^2 + 2n \geq n^2 + 3n + 2.$$

Durch Subtraktion von $n^2$ und $2n$ auf beiden Seiten, sehen wir, dass dies äquivalent zu

$$n^2 \geq n + 2$$

ist. Diese Aussage kann man nun auf verschiedene Weisen beweisen:

- Vollständige Induktion.
- Division mit $n$ liefert $n \geq 1 + \frac{2}{n}$, was für alle $n \geq 2$ gilt, weil $\frac{2}{n} \leq 1$ für $n \geq 2$ und folglich
$$n \geq 2 = 1 + 1 \geq 1 + \frac{2}{n}.$$
- Das Polynom $f(n) = n^2 - n - 2$ hat Nullstellen $n = 2$ und $n = -1$. Es ist eine nach oben geöffnete Parabel und folglich $f(n) \geq 2$ für $n \geq 2$, was äquivalent zur Behauptung ist.

□

Aus $(*)$ folgt nun leicht die ursprüngliche Behauptung für $n \geq 100^{100}$:

$$2^n \geq n^2 + n \geq n^2 + 100^{100}.$$

*Beweis 2*: Wir zeigen die Behauptung $2^n \geq n^2 + 100^{100}$ direkt per Induktion.

*Beweis.* Die Schwierigkeit besteht hier darin, den Induktionsanfang zu finden. Dafür nutzen wir die Potenzgesetze: Wir haben $2^{6.64\dots} = 100$ und man rechnet (am Besten am Computer) $2^{6.65} \geq 100 + 0.4$, also

$$2^{665} \geq (100 + 0.4)^{100} \geq 100^{100} + 100 \cdot 100^{99} \cdot 0.4 \geq 100^{100} + 665^2,$$

wobei wir im zweiten Schritt den Binomischen Lehrsatz benutzt haben und nur die ersten beiden Summanden behalten haben. Dies liefert den Induktionsanfang und wir sehen, dass $n = 665$ sogar die *kleinste* Zahl ist, für die die Behauptung wahr ist. Nun machen wir den Induktionsschritt. Dafür schreiben wir wie voher beide Seiten aus:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{\geq} 2 \cdot (n^2 + 100^{100}) = 2n^2 + 2 \cdot 100^{100} \\ (n+1)^2 + 100^{100} &= n^2 + 2n + 1 + 100^{100}. \end{aligned}$$

Um den Induktionsschritt abzuschließen, müssen wir also noch zeigen, dass

$$2n^2 + 2 \cdot 100^{100} \geq n^2 + 2n + 1 + 100^{100}$$

für alle $n \geq 665$ gilt oder äquivalent, dass $n^2 + 100^{100} \geq 2n + 1$, was aber wiederum zu $n + \frac{100^{100}}{n} \geq 2 + \frac{1}{n}$ äquivalent ist, und diese Aussage ist natürlich wahr. □

Ein dritter Beweis ist von allgemeiner Natur und benutzt Grenzwerte. Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Wir bemerken zuerst, dass

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to \infty \ (n \to \infty) \ \Rightarrow \ f(n) \geq g(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ groß genug.} \qquad (**)$$

Die Aussage auf der linken Seite schreibt man in der *Landau Notation* auch als $g \in o(f)$. Diese Notation macht die intuitive Vorstellung, dass $f$ deutlich schneller als $g$ wächst präzise.
Außerdem gilt

$$g \in o(f) \Rightarrow g \in o(\lambda f) \text{ für beliebiges } \lambda > 0$$
$$g \in o(f),\ h \in o(f) \Rightarrow \max\{g, h\} \in o(f).$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to \infty \ \Rightarrow \frac{\lambda f(n)}{g(n)} \to \infty \text{ für beliebiges } \lambda > 0,$$
$$\frac{f(n)}{g(n)} \to \infty, \frac{f(n)}{h(n)} \to \infty \ \Rightarrow \frac{f(n)}{\max\{g(n), h(n)\}} \to \infty.$$

Folglich gilt, falls $g, h \in o(f)$, dass

$$\frac{f(n)}{g(n)+h(n)} \geq \frac{f(n)}{2\max g(n), h(n)} \to \infty,$$

d.h. $\frac{f(n)}{g(n)+h(n)} \to \infty$. Mit dieser Hilfsaussage können wir nun den allgemeinen Fall beweisen.

*Beweis.* In unserem konkreten Fall haben wir $f(n) = 2^n$, $g(n) = n^2$ und $h(n) = 100^{100}$. Offensichtlich gilt $\frac{f(n)}{h(n)} \to \infty$ also genügt es, $\frac{2^n}{n^2} = \frac{f(n)}{g(n)} \to \infty$ zu zeigen, denn dann folgt die Behauptung mit $(**)$. Dafür bemerken wir mit dem Binomischen Lehrsatz, dass für $n \geq 3$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq \frac{n^3}{6}.$$

Also folgt

$$\frac{2^n}{n^2} \geq \frac{n^3}{6n^2} = \frac{n}{6} \to \infty,$$

was die Behauptung zeigt. □

Der zweite Beweis hatte den Vorteil, dass er sogar das kleinste $n \in \mathbb{N}$ bestimmt, bei der die Aussage wahr ist. Allerdings ist dieser Beweis auf eine “nervige” Rechnung angewiesen und schwieriger zu verallgemeinern als die anderen beiden Beweise. Wir sehen, dass Beweis 1 leicht angepasst werden kann, um Aussagen der Form $2^n \geq n^2 + C$ für eine fixe Konstante $C \in \mathbb{N}$ zu beweisen.
Beweis 3 ist am allgemeinsten und kann genutzt werden, um beliebige Ungleichungen der Form $f(n) \geq g(n) + h(n)$ mit $g, h \in o(f)$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

# Aufgabe T4.3(b)

Beweisen Sie das **Einschließungskriterium**:
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit

(i) $b_n \leq a_n \leq c_n$,

(ii) $b_n \to x$, $c_n \to x$.

Dann gilt $a_n \to x$.

*Beweis.* Wir zeigen, dass $(b_n)$ und $(c_n)$ sich beliebig nahe aneinander annähern, d.h. folgende Hilfsaussage:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |b_n - c_n| < \epsilon. \tag{1}$$

In der Tat existiert wegen (i) zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N. \tag{2}$$

Zudem existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|c_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq M,$$

also folgt (1) mithilfe der Dreiecksungleichung:

$$|b_n - c_n| = |(b_n - x) + (x - c_n)| \leq |b_n - x| + |x - c_n| < \epsilon \quad \forall n \geq \max\{N, M\}.$$

Wegen (i) gilt

$$|a_n - b_n| = a_n - b_n \leq c_n - b_n = |b_n - c_n|,$$

also folgt aus (1) die Aussage

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - b_n| < \epsilon. \tag{3}$$

Um $a_n \to x$ zu zeigen, sei zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ wie in (2) gewählt. Wegen (3) können wir zudem ein $M \in \mathbb{N}$ finden, sodass $|a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Damit folgt wieder mithilfe der Dreiecksungleichung, dass

$$|a_n - x| = |(a_n - b_n) + (b_n - x)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - x| < \epsilon \quad \forall n \geq \max\{M, N\},$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Dieser Beweis nutzt ein typisches $\frac{\epsilon}{2}$-Argument.

Wir wollen noch ein weiteres Argument für 1 füren, wofür wir folgende ad-hoc Notation und ein entsprechendes Lemma benötigen.

**Definition 1.** Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$ ist eine **Teilfolgenpartition** eine Menge von Teilfolgen, die die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ partitionieren.

**Beispiel 2.** Zum Beispiel ist eine Teilfolgenpartition gegeben durch die beiden Teilfolgen $(a_{2k})$, $(a_{2k+1})$ der geraden und ungeraden Indizes.

**Lemma 3.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn eine endliche Teilfolgenpartition $(a_{k_1}), (a_{k_2}), \dots, (a_{k_l})$ existiert mit $a_{k_i} \to a$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$

*Beweis.* Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert. Konvergieren hingegen die $a_{k_i}$ gegen $a$, so finden wir zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N_i$ mit $|a_{k_i} - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N_i$ und der Index $N_i$ entspricht einem Index $M_i$ in der Folge $(a_n)$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq \max\{M_1, \dots, M_l\}$. □

**Beispiel 4.** Interessanterweise ist die Aussage von Lemma 3 falsch, wenn wir unendliche Teilfolgenpartitionen erlauben. Als Beispiel dient die Folge

$$\underbrace{1}_{1}, \underbrace{1}_{2}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{1}_{3}, \underbrace{0}_{2}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{1}_{4}, \underbrace{0}_{3}, \underbrace{0}_{2}, \underbrace{0}_{1}, \underbrace{1}_{5}, \underbrace{0}_{4}, \underbrace{0}_{3}, \underbrace{0}_{2}, \underbrace{0}_{1}, \dots,$$

wobei die Zahl unter den Klammern den Index der entsprechenden Teilfolgenpartition angibt. In dieser Teilfolgenpartition ist jede der Teilfolgen in der Partion $(1, 0, 0, \dots)$ und konvergiert damit gegen 0, aber die ganze Folge konvergiert nicht.

Nun folgt 1 aus der Tatsache, dass die Folge

$$b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots$$

nach Lemma 3 konvergiert und deshalb insbesondere Cauchy ist.

## Aufgabe H6.3(b)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Es gebe $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = 3$ und $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_2) = 1$. Gibt es ein $z_3 \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_3)| = 2$?

*Beweis.* In der Tat gibt es ein solches $z_3$. Dafür betrachtet man die stetige Funktion

$$g \coloneqq |-| \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto |f(x)|.$$

Um den Zwischenwertsatz anwenden zu können, müssen wir eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ finden, die $z_1$ und $z_2$ “durchläuft”, d.h. sodass $z_1$ und $z_2$ im Bild von $h$ sind. Eine natürliche Wahl für $h$ (und die, die in der Musterlösung getroffen wird), ist die Verbindungslinie $h(t) = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t$. Dann liefert der Zwischenwertsatz, angewendet auf die Funktion

$$g \circ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto |f(h(x))|$$

die Behauptung. Man beachte, dass wir hier für $h$ eine beliebige stetige Funktion wählen können, solange diese $z_1$ und $z_2$ “durchläuft”.
Dies wirft die interessante Frage auf, ob es eine Wahl von $h$ gibt, die für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ funktioniert. Dafür müsste $h$ surjektiv sein, d.h. wir bräuchten eine stetige surjektive Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Tatsächlich gibt es solche Funktionen (siehe hier), auch wenn ihre Konstruktion nicht einfach ist. □

# Aufgabe T9.2 [Teil]

Zeigen Sie, dass der Sinus streng monoton wachsend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist.

*Beweis.* Wie in der Musterlösung zeigt man, dass für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$ gilt, dass $\sin(x+h) > \sin(x)$. Aus dieser Aussage folgt dann die strenge Monotonie mithilfe des folgenden Lemmas. $\square$

Das folgende Lemma sagt intuitiv, dass "lokale" Monotonie äuivalent zur normalen Monotonie ist, solange die Funktion *linksstetig* ist. Linksstetig bedeutet, dass die Funktion stetig von links ist, d.h. für alle $x$ und Folgen $x_n \to x$ mit $x_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(x_n) \to f(x)$. Insbesondere ist jede stetige Funktion linksstetig.

**Lemma 5.** Es sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine linksstetige Funktion.
$f$ ist monoton steigend genau dann, wenn für alle $x \in (a,b)$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$ gilt, dass $f(x+h) \geq f(x)$.
Außerdem ist $f$ streng monoton steigend genau dann, wenn für alle $x \in (a,b)$ und alle hinreichend kleinen $h > 0$ gilt, dass $f(x+h) > f(x)$.

*Beweis.* Ist $f$ monoton steigend, so gilt auch $f(x+h) \geq f(x)$ für alle $h > 0$, sodass $x + h \in (a,b)$.
Ist umgekehrt $f$ nicht monoton steigend, so gibt es $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ und $f(x) > f(y)$. Wir betrachten die Menge

$$S \coloneqq \{s \in [x,b) : f(t) \geq f(x) \ \forall \ t \in (x,s)\}$$

und bemerken, dass

$$s, s' \in [x,b), s < s', s' \in S \ \Rightarrow \ s \in S.$$

Wegen $x \in S$ ist $S$ nicht leer und es existiert $x_* \coloneqq \sup(S)$. Außerdem impliziert $y \notin S$, dass $x_* \leq y$. Nach Definition des Supremum existiert eine Folge $s_n \in [x,b)$ mit $s_n \to x_*$ und $f(t) \geq f(x)$ für alle $t \in (x, s_n)$ und $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $f(t) \geq f(x)$ für alle $t \in (x, x_*)$ (d.h. $x_* \in S$) und wegen der Linksstetigkeit von $f$ auch $f(x_*) \geq f(x)$. Folglich gibt es für beliebiges $\delta > 0$ ein $h \in (0,\delta)$ mit $f(x_* + h) < f(x)$, denn sonst wäre das Supremum von $S$ mindestens $x_* + \delta$. Für solche $h$ gilt damit $f(x_* + h) < f(x_*)$, was die Behauptung zeigt.
Der Beweis für den Fall der strengen Monotonie ist komplett analog. $\square$

# Aufgabe T11.3

Beweisen Sie den **verallgemeinerten Mittelwertsatz**: Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f, g$ differenzierbar auf $(a,b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt

(i) $g(b) \neq g(a)$,

(ii) Es gibt $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

*Beweis.*

(i) Dies folgt direkt aus dem (normalen) Mittelwertsatz.

(ii) Die Idee ist, eine Funktion $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zu konstruieren und auf diese den (normalen) Mittelwertsatz anzuwenden. Danach gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$r'(\xi) = \frac{r(b)-r(a)}{b-a}. \qquad (*)$$

Die Behauptung in (ii) ist äquivalent zu

$$f'(\xi) - g'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = 0. \qquad (**)$$

Wir wollen jetzt unser $r$ so konstruieren, dass diese Gleichung für alle $\xi \in [a,b]$ gilt. Gilt zusätzlich $r(b) = r(a)$, dann genügt es wegen $(*)$ und $(**)$, $r$ so zu konstruieren, dass

$$r'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Somit ist $r$ von der Form $r(\xi) = f(\xi) - g(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.
Man prüft leicht nach, dass dieses $r$ (unabhängig von $C$) $r(b) = r(a)$ erfüllt.
$C$ kann nun beliebig gewählt werden. Z.B. kann man $C$ derart wählen, dass $r(a) = 0$ gilt, indem man in obige Formel $\xi = a$ einsetzt, gleich 0 setzt und nach $C$ auflöst. Dies liefert das $r$, welches in der Musterlösung gewählt wurde.
Eine andere natürliche Wahl ist $C = 0$. In diesem Fall ist also

$$r(x) = f(x) - g(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Unabhängig von der konkreten Wahl von $C$ folgt die Behauptung nun durch Anwenden des Mittelwertsatzes auf $r$.

□